31/10/16

Παράδειγμα

$k[x_1,x_2,x_3]$

Έστω $x_1^7 = x^a$

$x_1^2x_2^3x_3^2 = x^b$

$x_1x_2^5x_3 = x^\gamma$

$x_1^4x_2 = x^\delta$

$x_1x_2x_3^3 = x^\varepsilon$

$x_3^5 = x^\zeta$

Θέλω να τα διατάξω με τους εξής τρόπους:

- lex $x_2 > x_1 > x_3$

  Άρα: $x^\gamma > x^b > x^\delta > x^\varepsilon > x^a$

- deglex: $x_3 > x_1 > x_2$

  Άρα: $x^b > x^\gamma > x^a > x^\zeta > x^\varepsilon > x^\delta$

- degrevlex: $x_1 > x_3 > x_2$

  Άρα: $x^a > x^b > x^\gamma > x^\zeta > x^\delta > x^\varepsilon$

Homework

ΝΔΟ deglex είναι μονωνυμική διάταξη

Στο χώρο $k[x_1, \dots x_n]$ έχω διάνυσμα

$c = (c_1, c_2, \dots, c_n) \in (\mathbb{R}_{\geq 0})^n$

Τότε ορίζω:

Εσωτερικό γινόμενο

$$x^a <_c x^b \overset{\text{ΟΡΙΣΜΟΣ}}{\Longleftrightarrow} c\cdot a < c\cdot b$$

$$\text{ή } c\cdot a = c\cdot b \text{ και } x^a \underset{lex}{<} x^b$$

πχ

Αν $c = (1,1,\dots 1)$ τότε $<_c$ είναι η deglex γιατί $c \cdot \alpha = (c_1, \dots, c_n)(a_1, \dots, a_n) = c_1a_1 + c_2a_2 + \dots + c_na_n$

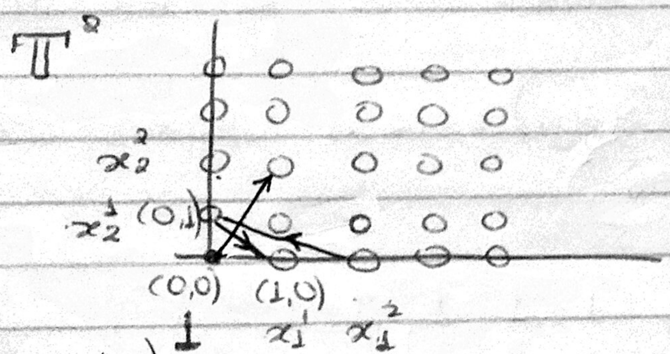
$c = (1, 1, \dots, 1)$

$c\ \alpha = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \deg(x^\alpha)$

$\hookrightarrow \deg_c(x^a)$

Αν $c = (0, 0, \dots, 0)$ τότε $<_c$ lex

Προσοχή!
Δε μπορώ να ορίσω την degrevlex με διάνυσμα



lex $x_2 > x_1$

$c = (1,2)$

Άρα $x^{a_1}x^{a_2}$ $x^{b_1}x^{b_2}$

$(1,2)\ (a_1,a_2)$ $(1,2)\ (b_1,b_2)$

$a_1 + 2a_2$ $b_1 + 2b_2$

Αν είχα πχ $c = (1, \sqrt{2})$ τότε $\deg_c(x_1^k x_2^\lambda) = \deg_c(x_1^m x_2^n)$

άρα

$(k,\lambda) \cdot (1, \sqrt{2}) = k + \lambda\sqrt{2} = (m, n)(1, \sqrt{2}) = m + n\sqrt{2}$

$(k - m) = (n - \lambda)\sqrt{2}$

$n - \lambda = 0$ και άρα $k - m = 0$

γιατί ένας ρητός δε μπορεί να είναι και άρρητος.

Άρα δε χρειάζεται καν να πάω σε λεξικογραφική

Αυτό συμβαίνει μόνο στους άρρητους

$A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ $K[x_1,\dots,x_n]$

$x^a >_A x^b$ αν $a \neq b$ και η πρώτη μη μηδενική συνιστώσα του $A(a-b)^t$ είναι θετική.

$$\underset{m\times n}{A}\,\underset{1\times n}{(a-b)}^{\underset{n\times 1}{t}} \xleftarrow{} m\times 1 \quad \text{είναι θετική}$$

Παραδείγματα

1) $A = I_{n\times n} = I_n = (\delta_{ij})$ $<_A$ lex $x_1 > x_2 \quad > x_n$

2) $A_\sigma = (\delta_{i\sigma(j)})$ $<_{A_\sigma}$ lex $>$

$n!$ διατάξεις

3) $$\underset{(n+1)\times n}{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} I_n \quad \underset{n\times 1}{\begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ \vdots \\ \\ a_n - b_n \end{pmatrix}} =$$

$$\begin{pmatrix} (a_1 + a_2 + \dots + a_n) - (b_1 + b_2 + \dots + b_n) \, (\star) \\ a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ \vdots \\ a_n - b_n \end{pmatrix}$$

$\star = \deg(x^a) - \deg(x^b)$

deglex $x_1 > x_2 > \dots > x_n$

4) $$\underset{(n+1)\times n}{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \\ & & \vdots & & \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ \vdots \\ \\ \\ a_n - b_n \end{pmatrix}}_{n\times 1} =$$

$$= \begin{pmatrix} \deg(x^a) - \deg(x^b) \\ -a_n + b_n \\ -a_{n-1} + b_{n-1} \\ \vdots \\ -a_1 + b_1 \end{pmatrix}$$

Άρα degrevlex $x_1 > \dots > x_n$

5) $$M = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Αυτό μας δείχνει ότι μπορεί να υπάρχουν και πιο περίπλοκοι πίνακες οι οποίοι όμως χρειάζονται εξίσου

Θεώρημα Robbiano (1991)

Ένας πίνακας $M \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ορίζει μονωνυμική διάταξη $\iff$

1) $\ker(M) \cap \mathbb{N}_0^n = \{(0,\dots,0)\}$
2) Η πρώτη μη μηδενική συντεταγμένη σε κάθε στήλη του M είναι θετική

Καθε μονωνυμικη διαταξη μπορει να οριστει απο ενα πινακα της παρακατω μορφης.

Παραδειγμα

1) Έστω $a,b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

Οι πινακες $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ και $B = \begin{pmatrix} b & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

οριζουν μονωνυμικες διαταξεις στον $k[x_1, \dots x_n]$

Θ.δ.ο. $\ker A \cap \mathbb{N}_0^2$

Εστω $(x,y) \in \ker A$

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x + ay = 0 \Rightarrow x = 0 \\ 0x + y = 0 \Rightarrow y = 0 \end{matrix}$$

2) Έστω $A = (a, 1)$

$a \in \mathbb{R}$ και $a \notin \mathbb{Q}$

Έστω $(x,y) \in \ker A \cap \mathbb{N}_0^2$

$$(1, a)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} x + ay = 0 \\ (x,y) \in \mathbb{N}_0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow y = 0$$

γιατι αλλιως $a \in \mathbb{Q}$

$a = -x/y$

αρα $x + a0 = 0 \Rightarrow x = 0$

Ολες οι μονωνυμικες διαταξεις στον $k[x_1, \dots, x_n]$ οριζονται η απο τον $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ή τον $B = \begin{pmatrix} b & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

- **Διαιρεση Πολυωνυμων**

Εστω $<$ μονωνυμική διάταξη στον $K[x_1, \dots, x_n]$
και

$$f = c_1 x^{a_1} + c_2 x^{a_2} + \dots + c_s x^{a_s} \quad c_i \neq 0$$
$$a_i \neq a_j$$

τ.ω. $x^{a_1} > x^{a_2} > \dots > x^{a_s}$

(γράφω μόνο τους μη μηδενικούς όρους.

Ο όρος $c_1 x^{a_1}$ ονομάζεται αρχικός όρος και συμβολίζεται με $\underbrace{lt}(f)$
↳ leading term

Ο όρος c_1 ονομάζεται αρχικός συντελεστής και συμβολίζεται με $\underbrace{lc}(f)$
↳ leading coefficient

Το x^{a_1} ονομάζεται αρχικό μονώνυμο και συμβολίζεται με $\underbrace{lm}(f)$
↳ leading mononyme

Παράδειγμα

$\mathbb{Q}[x_1 x_2 x_3]$ degrevlex $x_1 > x_2 > x_3$

Διατεταγμένα

$$f = 3x_1^3 - x_1x_2 - 2x_1x_3$$
$$g = 2x_1^3 + x_1^3 - 2x_2x_3 + x_1x_3 = 3x_1^3 + x_1x_3 - 2x_2x_3$$
$$h = 2x_1^3 - 2x_1^3 - 2x_2x_3 + x_1x_3 = x_1x_3 - 2x_1x_3$$

	lt	lc	lm
f	$3x_1^3$	3	x_1^3
g	$3x_1^3$	3	x_1^3
h	x_1x_3	1	x_1x_3

Ορισμός

Έστω $f, g, h \in k[x_1, \dots, x_n]$ με $g \neq 0$. Θα λέμε ότι το f ανάγεται στο h μοδιο g σε 1 βήμα και θα το συμβολίζουμε

$$f \xrightarrow{g} h \iff$$

1) Το αρχικό μονώνυμο του g διαιρεί ένα μη μηδενικό όρο x του f.
2) $h = f - \frac{x}{lt(g)} g$

Παράδειγμα

Έστω $f = 2x_1^2x_3 + \overbrace{3x_1x_2x_3^3}^{x} - x_3$ lex $x_1 > x_2 > x_3$
$g = x_2x_3^2 - x_3^5$

$$h = f - \frac{x}{lt(g)} g = 2x_1^2x_3 + 3x_1x_2x_3^2 - x_3 - \frac{3x_1x_2x_3^2}{x_2x_3^2} \cdot x_2x_3^2 - x_3^5$$

$$= 2x_1^2x_3 + 3x_1x_2x_3^3 - x_3 - 3x_1x_2x_3^3 + 3x_1x_3^6$$

$$= 2x_1^2x_3 - x_3 - 3x_1x_3^6$$

$$= 2x_1^2x_3 + 3x_1x_3^6 - x_3$$

Ορισμός

Έστω $f, h, \overbrace{f_1, \dots, f_s}^{\text{διαιρέτες}}$ πολυώνυμα του $k[x_1, \dots, x_s]$ με $f_i \neq 0$ για $i \in [1, \dots s]$ και $F = \{f_1, f_2, \dots f_s\}$

Θα λέμε ότι το f ανάγεται στο μοδιο F και θα συμβολίζουμε με $f \xrightarrow{F} h \iff \exists$ ακολουθία πολυωνύμων $[h_1, \dots h_{t-1}]$ και ακολουθία δεικτών $\{i_1, \dots i_t\}$ τ.ω.

$$f \xrightarrow{f_{i(1)}} h_1 \xrightarrow{f_{i(2)}} h_2 \xrightarrow{f_{i\dots}} h_{t-1} \xrightarrow{f_i} h$$

i όχι απαραίτητα $\neq$ του j

Η ακολουθία και το υπόλοιπο δεν είναι μοναδικά

Παράδειγμα

$\mathbb{Q}[x,y,z]$ lex $x>y>z$

$F=\{f_1=x^3-y,\ f_2=xz-1,\ f_3=y^2-z\}$

$f=x^3y+2x^2z+3x^2-xy^2+7$

Λύση

f_1, f_2, f_3 : σωστά διατεταγμένα

Σε πρώτη φάση επιλέγω τυχαία να αρχίσω με το f_2

$$f \xrightarrow{f_2} h_1 = f - \frac{2x^2z}{xz}(xz-1) =$$

$$= xy^3+2x^2z+3x^2-xy^2+7-2x^2z+2x$$

$$= x^3y+3x^2-xy^2+2x+7$$

Επιλέγω τυχαία το f_3 για να συνεχίσω

$$h_1 \xrightarrow{f_3} x^3y+3x^2-xy^2+2x-7 - \frac{-xy^2}{y^2}(y^2-z) =$$

$$= x^3y+3x^2+2x+7-xz$$

$$= x^3y+3x^2-xz+2x+7 \xrightarrow{f_1}$$

$$= x^3y+3x^2-xz+2x+7-\frac{x^3y}{x^3}(x^3-y) =$$

$$= 3x^2-\underline{xz}+2x+7+y^2 \xrightarrow{f_2}$$

$$= 3x^2-xz+2x+y^2+7 - \frac{-xz}{xz}(xz-1) =$$

$$= 3x^2+2x+y^2+6 \xrightarrow{f_3}$$

$$= 3x^2+2x+y^2+6-\frac{y^2}{y^2}(y^2-z) = \boxed{3x^2+2x+6+z}$$

Δε μπορώ να συνεχίσω